

Colle du 09/10 - Sujet 1
Bijection et trigonométrie

Question de cours.

1. Factoriser $\sin(p) + \sin(q)$.
2. Montrer que la fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} à l'aide de limites usuelles.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $2 \cos^2(2x) - 3 \cos(2x) \leq -1$.

Exercice 2.

1. Montrer que la fonction sinus définit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ dans un ensemble V que l'on déterminera. On note φ sa réciproque.
2. Déterminer le tableau de variation de φ et préciser $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$, $\varphi(-\frac{1}{2})$.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de φ et déterminer sa dérivée.

Colle du 09/10 - Sujet 2
Bijection et trigonométrie

Question de cours.

1. Linéariser $\sin(a) \sin(b)$.
2. Démontrer la valeur de $\cos(\frac{\pi}{3})$.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f définit une bijection de \mathbb{R} dans un ensemble que l'on précisera.
3. Déterminer une expression de f^{-1} analogue à celle de f .
4. Calculer de deux façons différentes la dérivée de f^{-1} .

Exercice 2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a + b + c = \pi$. Montrer que

$$1 + 4 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) \sin\left(\frac{c}{2}\right) = \cos(a) + \cos(b) + \cos(c).$$

Colle du 09/10 - Sujet 3
Bijection et trigonométrie

Question de cours.

1. Linéariser $\cos(x)\sin(x)$.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ définit une bijection de $]1; +\infty[$ dans \mathbb{R} et préciser sa fonction réciproque.

Exercice 1. Soit

$$g : \quad]-\pi; \pi[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2 \cos(x) - 6 \sin(x) + 8}{1 + \cos(x)}.$$

Démontrer que g admet un minimum sur $] -\pi; \pi[$ et le déterminer.

On pourra passer par les formules de l'angle moitié.

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$.

1. Etudier la fonction f .
2. Démontrer que f est bijective sur son ensemble de définition et déterminer g sa réciproque.
3. Dériver g de deux façons.